



TITLE:

準安定状態と異常揺動

AUTHOR(S):

村上, 力; 富田, 博之

CITATION:

村上, 力 ...[et al]. 準安定状態と異常揺動. 物性研究 1978, 30(3): 89-106

ISSUE DATE:

1978-06-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/89559>

RIGHT:

「準安定状態と異常揺動」

京大理 村上 力

京大教養 富田 博之

§ 1 Introduction

熱平衡から遠く離れた熱力学的に不安定な状態からの非線型緩和の問題は、非平衡統計力学の重要なテーマの一つであり、^{1)~6)}特に核形成及び凝縮過程 (order parameter が保存されない場合)⁷⁾、あるいは二成分混合系におけるスピノダル分解 (order parameter が保存される場合)などの相転移の動的な側面の研究が最近多くの人々によってなされている。ここでは、特に order parameter が保存されない場合に対し、従来主として扱われてきた TDGL model^{8)~10)}、kinetic Ising model^{11)~14)}よりもさらに取扱いの容易な kinetic model を導入することによって、一次相転移に特徴的な hysteresis, metastable state の出現等の動的な側面について論じてみたい。²³⁾

model の導入に先だって、dynamics において重要な役割を果たすと思われるいくつかの物理的な効果について予備的な考察を行なっておくことは意味があるだろう。次の TDGL-Fokker-Planck 方程式を例にとってみよう。

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\{s(\mathbf{r})\}; t) = \int d\mathbf{r}' \frac{\delta}{\delta s(\mathbf{r}')} \left\{ \frac{\delta \Phi}{\delta s(\mathbf{r}')} + \frac{\delta}{\delta s(\mathbf{r}')} \right\} p(\{s(\mathbf{r})\}; t) \quad (1.1)$$

ここで、 $s(\mathbf{r})$ は local order parameter 'spin' であり

$$\Phi \equiv \beta \int d\mathbf{r} \left\{ -\frac{a}{2} s(\mathbf{r})^2 + \frac{g}{4} s(\mathbf{r})^4 - H s(\mathbf{r}) + \frac{J}{2} (\nabla s(\mathbf{r}))^2 \right\} \quad (1.2)$$

は free energy functional, $a > 0$ (i.e. $T < T_c$), $g > 0$, $J > 0$ である。空間的な一様性を仮定すれば、long range order (LRO)

$$\langle s \rangle_t = \int s(\mathbf{r}) p(\{s(\mathbf{r})\}; t) d\{s(\mathbf{r})\}$$

の従う方程式

$$\frac{1}{2k} \frac{d}{dt} \langle s \rangle_t = \frac{a'}{2} \langle s \rangle_t - \frac{g'}{2} \langle s^3 \rangle_t + \frac{h}{2k} \quad (1.3)$$

を得る。但し、 $k = \beta J$, $h = \beta H$, $a' = a/J$, $g' = g/J$ とおいた。さて、(1.3) 式の右辺をみると、これらは大まかにいて2つの部分からなっていることがわかる。即ち、系の co-operativity の効果を表わす最初の二項と、外場 H の効果を表わす第三項である。前者は、系をその「大勢」に従わせるように働くであろうから、場合によっては外場とは逆向きの変化を LRO に引き起こす。一方これらの二つの効果が引き起こす変化の時間スケールは、臨界点近傍を除けばそれぞれ $\tau_1^{-1} \sim \text{exchange energy/spin}$, $\tau_1^{-1} \sim \text{Zeeman energy/spin}$ 程度であろうから、外場が十分弱ければこれらの時間スケールは分離している。従って以上の様な条件のもとでは metastable state の出現が期待される。ところで、co-operativity に由来する最初の二項のうち非線型項 $\langle s^3 \rangle_t$ は特に重要である。この項の存在は、saturation の効果及び hierarchy 構造を通じてのゆらぎと LRO の結合の効果をもたらす。以上の点をふまえて、我々が hysteresis, metastability 等を問題にする際に考慮に入れなければならないと思われる事柄を、次の様に要約しておこう。

- ① co-operative effect と external effect の競合。
- ② saturation 効果の非線型性。
- ③ LRO とゆらぎ、特に空間的に非一様なゆらぎとの coupling 。

§ 2 において導入される model の基本的な点は上述の事柄を sum rule condition, 即ち

$$M(t)^2 + \int \chi(\mathbf{q}, t) d\mathbf{q} = \langle s(\mathbf{r})^2 \rangle_t = \text{const.} \quad (1.4)$$

という形で dynamics に取り入れることである。但し、

$$M(t) = \langle s \rangle_t, \quad \chi(\mathbf{q}, t) = \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \langle \delta s(\mathbf{0}) \delta s(\mathbf{r}) \rangle_t$$

であり、 $\delta s(\mathbf{r}) = s(\mathbf{r}) - \langle s \rangle_t$ である。Kinetic Ising model においては $s_i^2 = 1$ であるので、条件 (1.4) は改めて要請するまでもなく常に満たされている。しかしながら、この様な一種の保存量が存在することが、LRO とゆらぎの時間発展のしかたに一つの制限を加えており、逆にこのことからそれらのふるまいについてある程度予測することができる。例えば、 $M(t)$ が比較的ゆっくり正の値から負の値に変化していく様な緩和過程を考えてみよう。この時、系が速かに局所平衡に到達することを考えれば、短波長部分に対してはすでに

$$\chi(\mathbf{q}, t) \simeq \chi_{\text{eq}}(\mathbf{q}) \quad \text{for large } |\mathbf{q}|$$

となっているとしてよいだろう。従って、(1.4) が満たされておれば、 $M(t) \simeq 0$ となるあたりで長波長のゆらぎが増大しなければならないことがわかる。

§ 2 Kinetic mean-spherical model

(1.4) の sum rule condition は、static な問題においては Berlin-Kac の spherical model¹⁵⁾ をさらに簡単化した、いわゆる mean spherical model¹⁶⁾ における制限条件

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i^2 = 1 \quad (2.1)$$

と同等であり、これは Gaussian spin 系での低温における磁化の発散等の困難を救うために saturation の効果を取り入れることに相当する (図 1)。この考えは著者の一人に

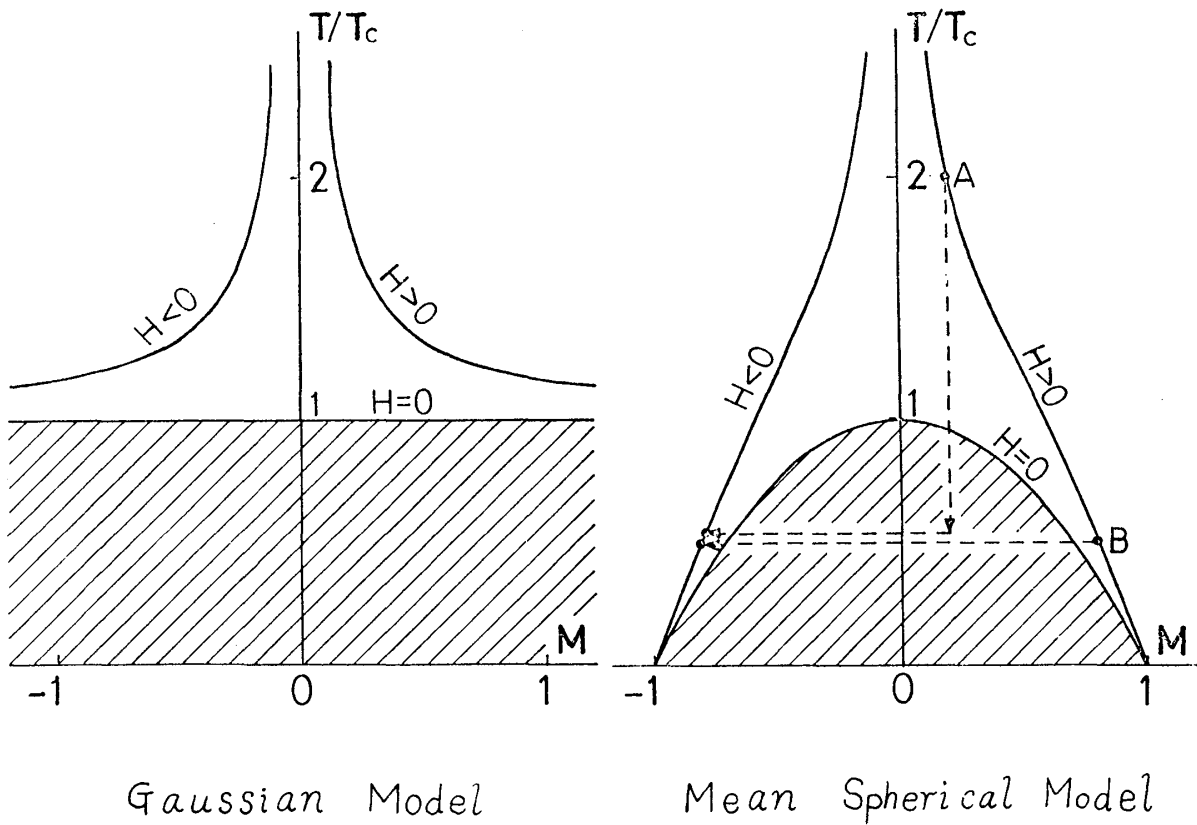


図 1

よって dynamics に拡張され、スピノダル分解の問題に適用された。¹⁷⁾ 以下では同様の方

法を order parameter が保存されないような問題に適用してみよう。まず Gaussian spin 系の $\{s_i; i=1, \dots, N\}$ の dynamics を導入する。即ち、系を記述する確率関数 $p(\{s_i\}; t)$ が次の Fokker-Planck 方程式に従うとする。

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} p(\{s_i\}; t) = \sum_j \frac{\partial}{\partial s_j} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial s_j} + \frac{\partial H}{\partial s_j} \right\} p(\{s_i\}; t) \quad (2.2)$$

但し、

$$\Phi(\{s_i\}) = \frac{\lambda}{2} \sum_i s_i^2 - \frac{\beta}{2} \sum_{i,j} J_{ij} s_i s_j - \beta H \sum_i s_i \quad (2.3)$$

であり、 α , λ は正の定数、他の定数は通常の意味である。系の空間的並進対称性は常に保たれているとすれば、時間に依存する LRO

$$M(t) = \frac{1}{N} \langle \sum_i s_i \rangle_t = \frac{1}{N} \sum_i \int s_i p(\{s_j\}; t) \prod_j ds_j \quad (2.4)$$

ゆらぎのスペクトル

$$\chi(\mathbf{q}, t) = \langle s(\mathbf{q}) s(-\mathbf{q}) \rangle_t - M(t)^2 \delta(\mathbf{q}) \quad (2.5)$$

但し

$$s(\mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j s_j \exp[i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_j]$$

の従う方程式が次の様に得られる。

$$\frac{d}{dt} M(t) = -\frac{1}{2} r M(t) + \frac{h}{2K} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \chi(\mathbf{q}, t) = -(r + \Delta(\mathbf{q})) \chi(\mathbf{q}, t) + K^{-1} \quad (2.7)$$

但し、相互作用は nearest neighbor pair $\langle i, j \rangle$ 間に限り $J_{ij} = J(>0)$ とし、 $K = \beta J$, $h = \beta H$, $r = (\lambda - \beta J(0))/K$, $\Delta(\mathbf{q}) = (J(0) - J(\mathbf{q}))/J$,

$$J(\mathbf{q}) = \sum_j J_{ij} \exp[i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]$$

とおいた。又 α は $2K\alpha t$ をあらためて t とおくことによって消去した。

ところで、(2.6), (2.7) で記述される系は、Gaussian model と同様 $T_c(\beta_c = 4/J(0))$ 以下で安定な平衡状態をもたない。そこで、改めて条件(2.1)が各時刻で満

たされるように r を時間とともに self consistent に決めて行くことにする。即ち,

$$\frac{1}{N} \sum_i \langle s_i^2 \rangle_t = M(t)^2 + \int \chi(\mathbf{q}, t) d\mathbf{q} = 1 \quad (2.8)$$

あるいはこれと同等な

$$\left\{ \begin{array}{l} r(t) = \frac{1}{K} (1 + hM(t)) - \int A(\mathbf{q}) \chi(\mathbf{q}, t) d\mathbf{q} \end{array} \right. \quad (2.9)$$

$$M(0)^2 + \int \chi(\mathbf{q}, 0) d\mathbf{q} = 1 \quad (2.10)$$

を (2.6), (2.7) と連立させる。但し、積分は first Brillouin zone について行なうものとする。この様にして定義される dynamics は mean-spherical model の dynamics ともいべきものになっており、平衡状態での M , $\chi(\mathbf{q})$ は mean-spherical model のそれと一致することがわかる。

ここで導入されたものと類似した model が、多少異なった観点からではあるが、すでに Suzuki¹⁸⁾, あるいは Rácz と Tél¹⁹⁾ らによって調べられている。

§ 3 Some rigorous results

前節で導かれた方程式 (2.6), (2.7) と (2.8) あるいは (2.9), (2.10) は非線型の方程式であり一般には数値的に解く以外にないが、 $h=0$ という場合には線型の方程式に帰着し、いくつかの厳密な結果を導くことができる。それらを以下に示すことにする。

今

$$R(t) \equiv \exp \left\{ \int_0^t r(s) ds \right\}, \quad f(t) \equiv \int e^{-A(\mathbf{q})t} d\mathbf{q} \quad (3.1)$$

とおけば、(2.6), (2.7) で $h=0$ としたものから

$$M(t) = R(t)^{-\frac{1}{2}} M(0) \quad (3.2)$$

$$\chi(\mathbf{q}, t) = R(t)^{-1} \left\{ \chi(\mathbf{q}, 0) e^{-A(\mathbf{q})t} + \frac{1}{K} \int_0^t e^{-A(\mathbf{q})(t-s)} R(s) ds \right\} \quad (3.3)$$

を得る。一方 $R(t)$ は上の二式と (2.8) より

$$R(t) = M(0)^2 + \int \chi(\mathbf{q}, 0) e^{-A(\mathbf{q})t} d\mathbf{q} + \frac{1}{K} \int_0^t e^{-A(\mathbf{q})(t-s)} R(s) ds \quad (3.4)$$

という方程式を満たすことがわかる。これは線型方程式であるから、Laplace 変換によっ

村上 力・富田博之

て解くことができる。即ち、 $\text{Im } \omega < 0$ に対し、

$$\rho(\omega) = \int_0^\infty R(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.5)$$

$$K_0(i\omega) = \int_0^\infty f(t) e^{-i\omega t} dt = \int \frac{1}{i\omega + \Delta(\mathbf{q})} d\mathbf{q} \quad (3.6)$$

とおけば、(3.4)より

$$\rho(\omega) = \left[1 - \frac{K_0(i\omega)}{K} \right]^{-1} \left\{ \frac{M(0)^2}{i\omega} + \int \frac{\chi(\mathbf{q}, 0)}{i\omega + \Delta(\mathbf{q})} d\mathbf{q} \right\} \quad (3.7)$$

を得る。特に初期値 $M(0)$, $\chi(\mathbf{q}, 0)$ としてある温度 $K = K_i$ での平衡状態での値をとれば

$$M(0) = 1 - K_0(r_i)/K_i, \quad \chi(\mathbf{q}, 0) = 1/K_i(r_i + \Delta(\mathbf{q}))$$

より、(3.7)は

$$\rho(\omega) = \frac{1}{i\omega [1 - K_0(i\omega)/K]} \left\{ 1 + \frac{r_i K_0(r_i)}{K_i(i\omega - r_i)} - \frac{i\omega K_0(i\omega)}{K_i(i\omega - r_i)} \right\} \quad (3.8)$$

となる。この右辺を ω の小さいところで展開することによって、温度を $K_i \rightarrow K$ と変化させたときの $M(t)$ の漸近的なふるまいをみることができる。但し、Appendix に平衡状態における諸量と $K_0(z)$ の展開式を与えておく。それらを用いれば次の結果を得る。

a) $K > K_c$ の時、 $t \gg 1$ に対し

$$R(t) - R(\infty) \sim \frac{A R(\infty)}{\Gamma(1-a)(K - K_c)} t^{-a}$$

$$R(\infty) = (1 - K_0(r_i)/(1 - K_c/K))$$

従って(3.2)より

$$M(t) - M(\infty) \sim \frac{A}{2K\Gamma(1-a)} (1 - K_c/K)^{-\frac{1}{2}} t^{-a} \quad (3.9)$$

但し、(z)はガンマ函数であり、 A , a 等の定数は Appendix B に与えられているものである。

b) $K = K_c$ の時、 $t \gg 1$ に対し

$$R(t) \sim \frac{M(0)^2 K_c}{A\Gamma(1+a)} t^a$$

従って(3.2)より

$$M(t) \sim \left(\frac{A\Gamma(1+a)}{K_c} \right)^{\frac{1}{2}} t^{-a/2} \quad (3.10)$$

(3.9), (3.10) は格子の次元 D が $2 < D < 4$ の場合の $a = (D-2)/2$ を用いれば Rácz と Tél の得た結果¹⁹⁾ に一致している。

次に、特に $h = 0$, $M(0) = 0$ の平衡状態にある系を quench した場合を考えよう。この時、(3.2) より $M(t) \equiv 0$ となる。簡単のため、初期状態として $T_i = \infty$ ($K_i = 0$) をとれば、

$$\chi(\mathbf{q}, 0) \equiv 1$$

であるから、(3.7) は

$$\rho(\omega) = K_0(i\omega) / [1 - K_0(i\omega)/K]$$

となり、

$$\bar{\xi}(\mathbf{q}, \omega) \equiv \int_0^\infty R(t) \chi(\mathbf{q}, t) e^{-i\omega t} dt = \frac{K}{K - K_0(i\omega)} \frac{1}{i\omega + \Delta(\mathbf{q})}$$

を得る。この結果は、 q が小さなところで $\Delta(\mathbf{q}) \sim q^2$ となることを考え合わせれば $\chi(\mathbf{q}, t)$ が q の小さなところで、漸近的に

$$q_c(t) \propto t^{-1/2} \quad (3.11)$$

という特性波数でスケールされることを示しているといえる。この $t^{-1/2}$ 則は Kawasaki et al.¹⁰⁾ によって導かれ、kinetic Ising model の Monte Carlo simulation¹³⁾ あるいは Cu_3Au についての実験²⁰⁾ 等で見出されている。さらにこの結果が次元 D によらないことも注意しておこう。²¹⁾

§ 4 Results of numerical computations

この節では、(2.6), (2.7), (2.9) を $D = 3$ の場合について数値的に解いた結果を簡単に紹介する。数値計算を行なうにあたり、次の連続体近似を採用した。

$$\Delta(\mathbf{q}) = q^2, \quad \int \cdots d\mathbf{q} = \int_0^1 \cdots 3q^2 dq \quad (4.1)$$

従って sum rule は次の形になることを注意したい。

$$M(t)^2 + \int_0^1 3q^2 \chi(q, t) dq = 1 \quad (4.2)$$

又、以下では温度としてスケールされた温度 $T \equiv K_c/K$ を用いることにする。

我々の興味があるのは次の様な緩和過程である。即ち、初め温度 T_i ，外場 h_i のもとで平衡状態にあった系が、突然温度，外場の変化を被った結果、新たな温度 T ，外場 h のもとでの平衡状態に移って行く様な場合である。数値計算を行なう際に、問題をさらに二つの場合に分けた。

(A) quenching problem ($T < T_i, h \leq 0$)

(B) field inversion problem ($T = T_i, h \leq 0$)

但し、 $h_i \geq 0$ とする。各場合の図式的な説明を図1に示してある。不安定領域(図1斜線部)における初期状態は(A)の quenching によって与えられる。

(A), (B)の各場合における代表的な $M(t)$ の変化の様子を示したのが図2である。

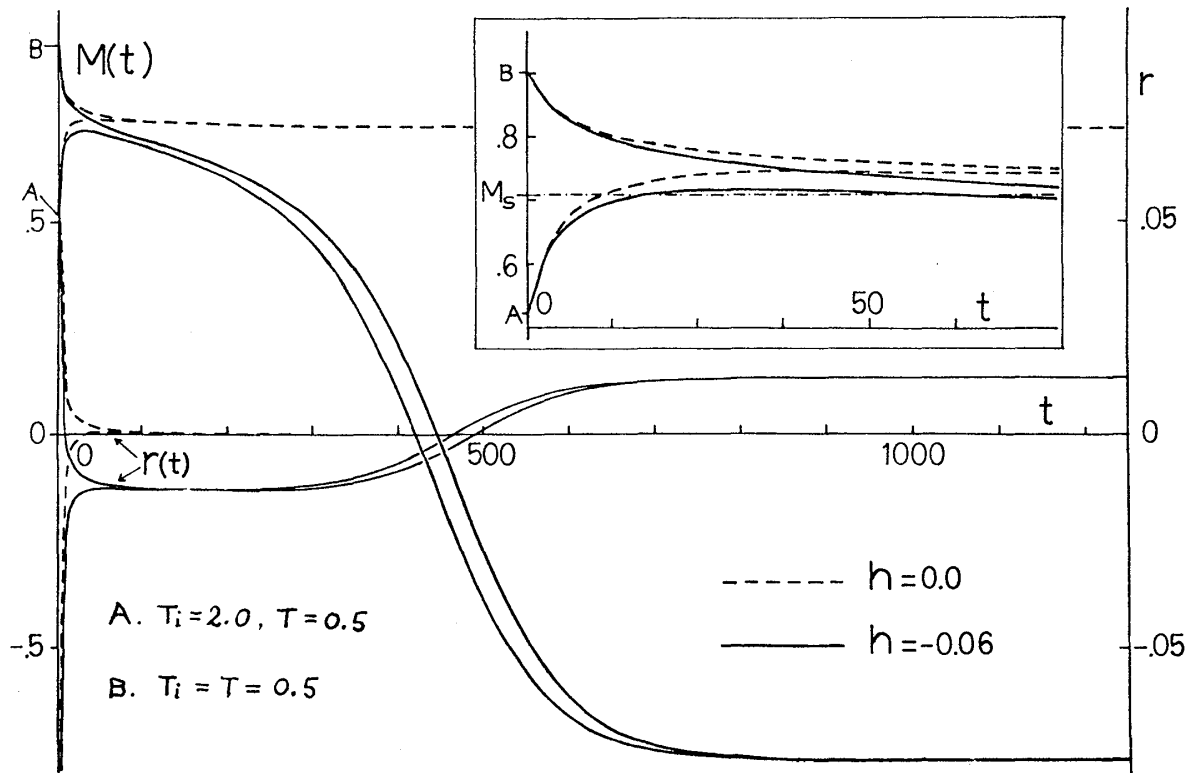


図 2

二つの場合の差異は、主に初期における速い変化にみられるのみで、十分時間がたった

ところではほぼ同じような変化を示すことがわかる。 $\chi(\mathbf{q}, t)$ についてもこれは同様の結果であった。図3は(A)の場合について外場の強さを変えたときの $M(t)$ の緩和の様子である。この図に示してある範囲では、初期の速い変化の時間スケール τ_1 は外場にほと

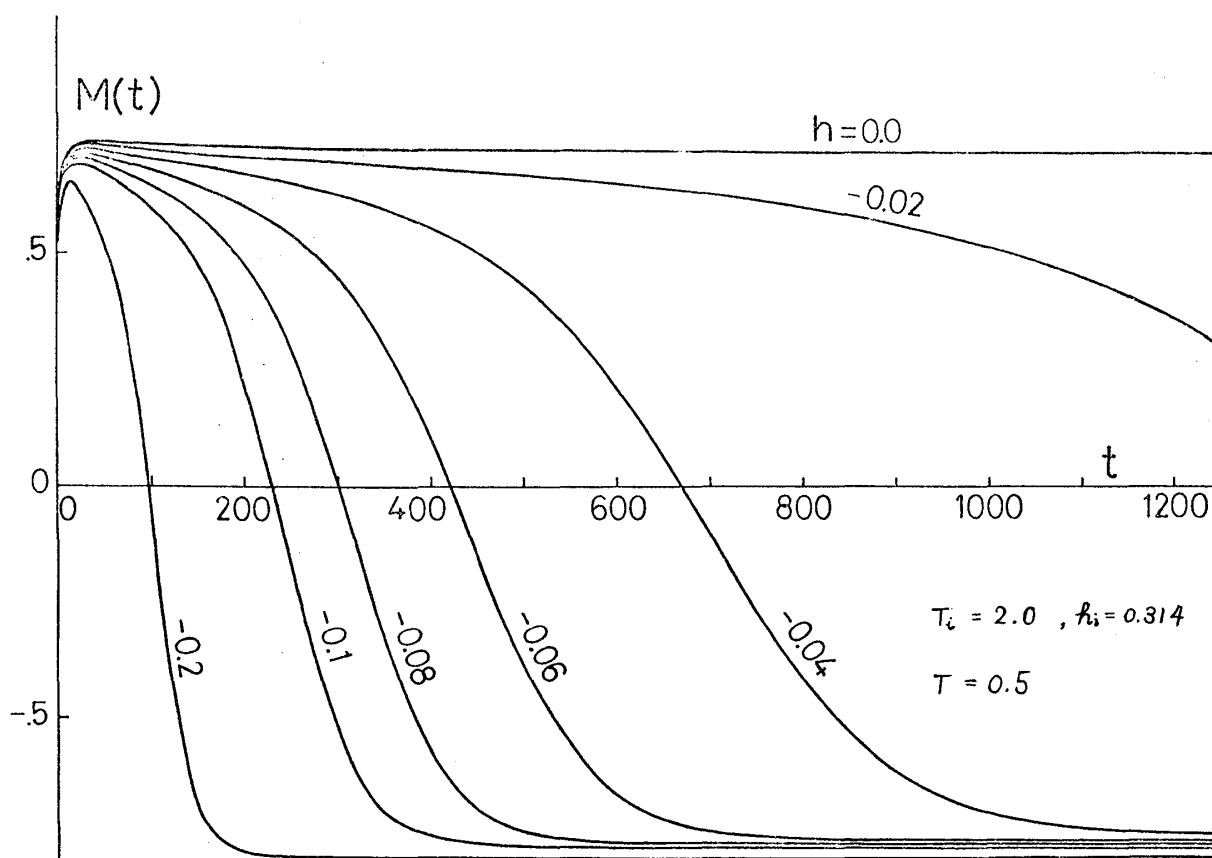


図 3

んどよっていない。但し、非常に強い外場に対しては $M(t)$ は単調に減少し、従ってちょうど $\dot{M}(0)=0$ となるような h_c が存在する。一方、初期の増加に続く比較的ゆるやかな変化の時間スケールはこの図に示してある範囲でも大きく磁場によっており、特に、外場が十分弱い時には life time の長い準定常状態 (metastable state) が現われる。これと非常に似た結果が、kinetic Ising model の simulation¹³⁾で得られている。さらに、この準定常状態の life time の目安として、 $M(t)=0$ なる時刻 τ_2 ，ならびに t の大きなところで

$$M(t) - M(\infty) \propto e^{-t/\tau'_2}$$

と近似して得られる τ'_2 をとり，その外場依存性を示したのが図 4 である。 τ_2^{-1} ， τ'^{-1}_2 共にほぼ h に比例していることがわかる。

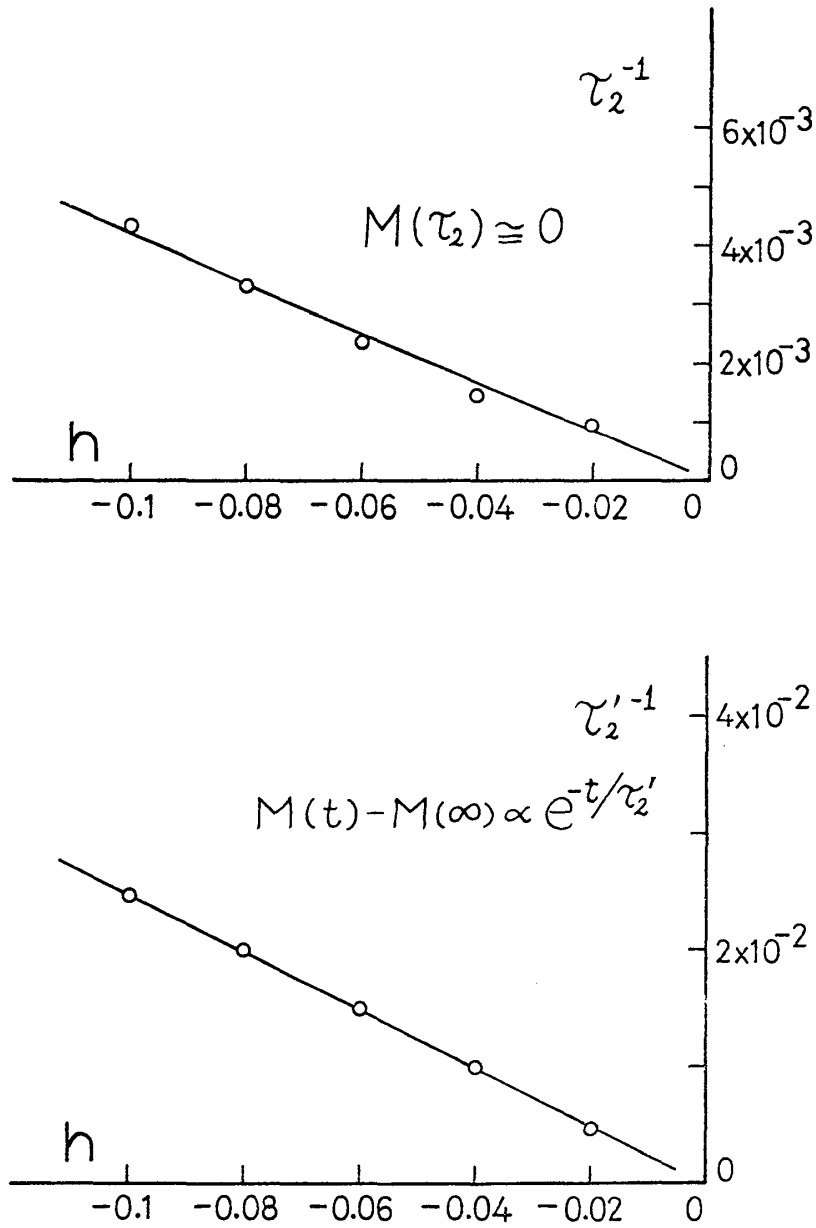


図 4

図 5 a, b は(A)の場合の $\chi(q, t)$ のふるまいを示したものである。 q の大きなところは

速かに平衡状態の値に達する（局所平衡）のに対し、 $h \neq 0$ の場合に q の小さなところ
即ち長波長のゆらぎが途中ちょうど $M(t) \simeq 0$ となるあたりで、非常に大きく enhance さ
れることは注目すべきである。この点はすでに § 1 でも述べた。

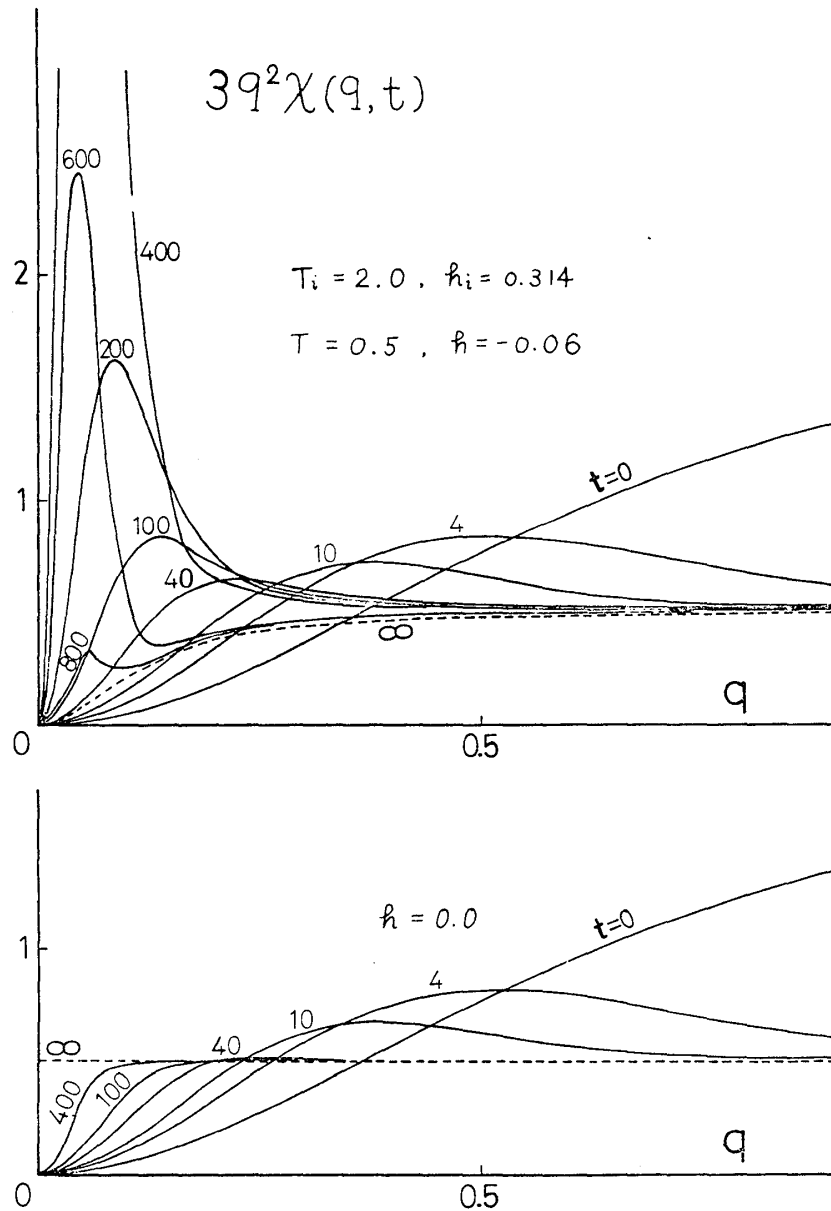


図 5, a

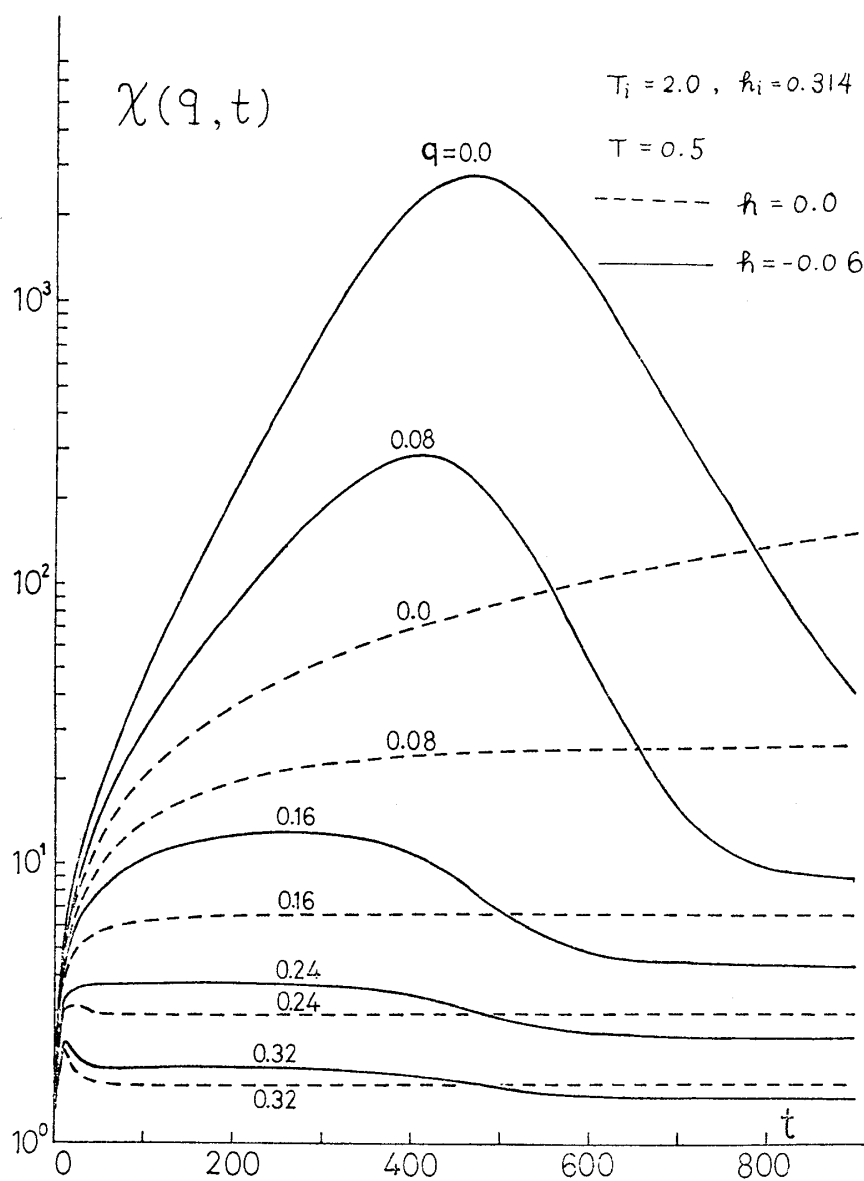


図 5, b

図6は(B)の場合に対する結果で、特に $h = -h_i$ ととり $\chi(q, 0) = \chi(q, \infty)$ となる様にしてある。この場合 q の大きなところはほとんど変化していない、即ち短波長部分は常に平衡状態にあることがわかる。

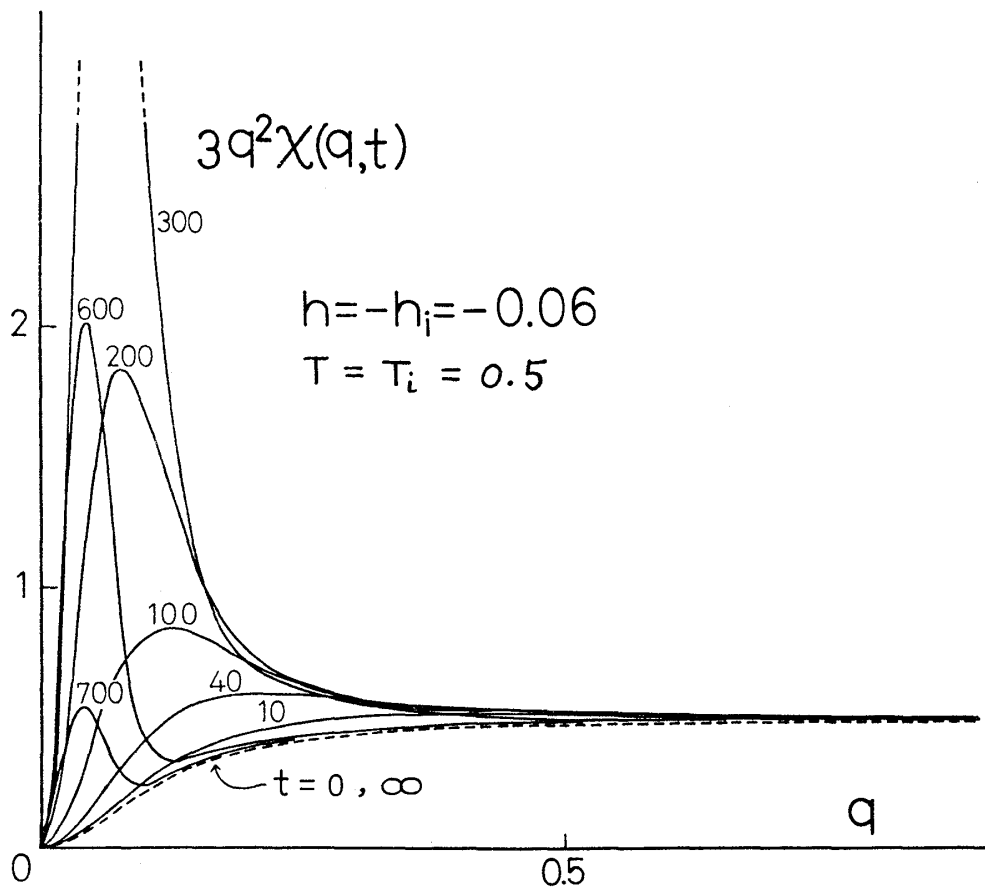


図 6

最後に図 7 は、 $h = h_i = 0$ 、 $M(t) \equiv 0$ で T_c 以上に quench した場合と T_c 以下に quench した場合の $\chi(q, t)$ のふるまいである。 T_c 以下に quench した場合には、 $3q^2\chi(q, t)$ に peak が現われ、peak の位置 $q_c(t)$ がほぼ $t^{-1/2}$ に比例して長波長領域へ移動して行くことがわかる。さらに、この peak が $(1 - T/T_c) \cdot \delta(q)$ に漸近して行くことは、(4.2) 式をみれば容易に推察されるであろう。このような状況は一見スピノダル分解の場合に似ているが、 $\chi(q, t)$ そのものの peak は常に $q = 0$ のところにあるという点で本質的に違っていることを注意したい。

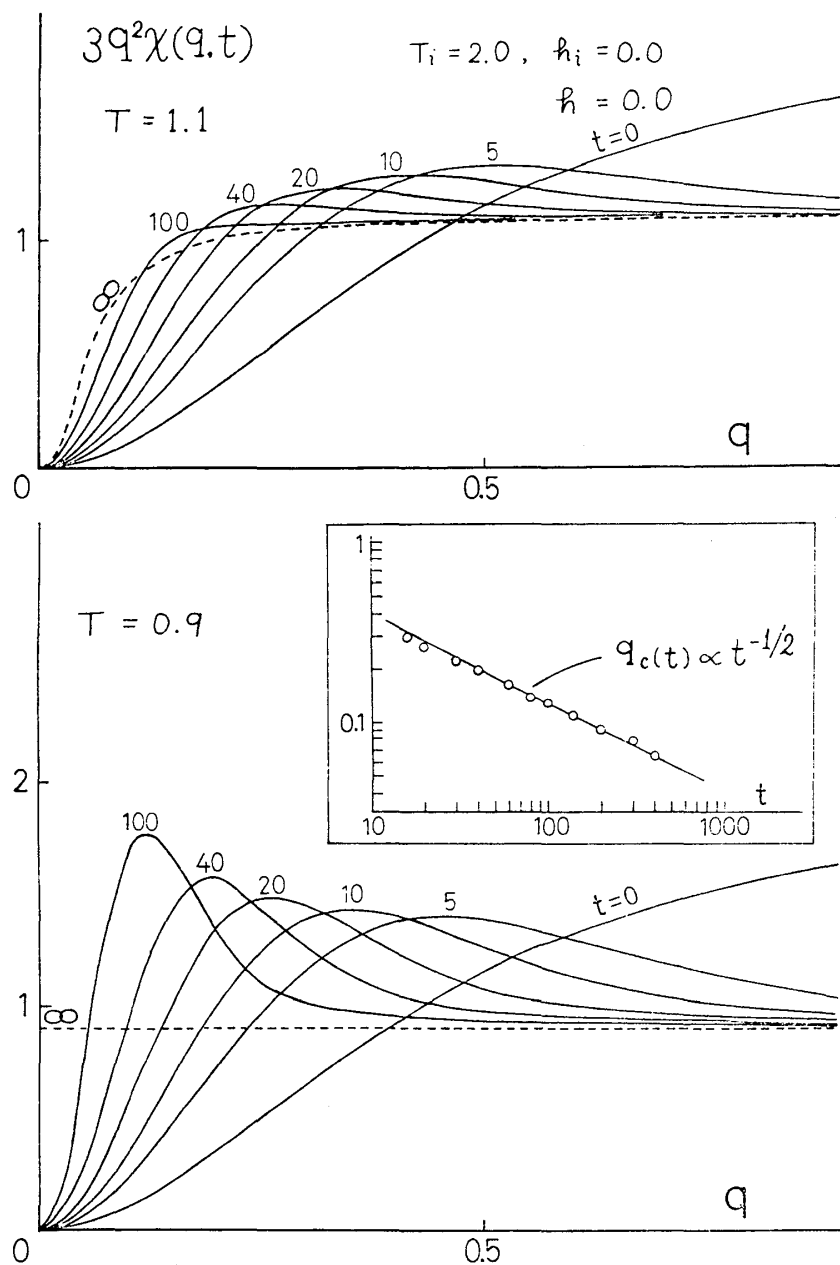


図 7

§ 5 おわりに

以上の様な結果と系の static なふるまいとを比較してみよう。図 8 にみるように spherical model においては安定な branch の延長としての metastable branch¹¹⁾ は存在していないし、外場を無限にゆっくり変化させる限り hysteresis もあり得ない。にもかかわらず、われわれは不安定状態からの緩和過程において、hysteresis, metastability に相

当するものを見出したし, quenched system においては coercive field H_c を定義することもできる。従って, これらの動的なふるまいが static な概念にどの様に対応するかということがさらに問題となるであろう。

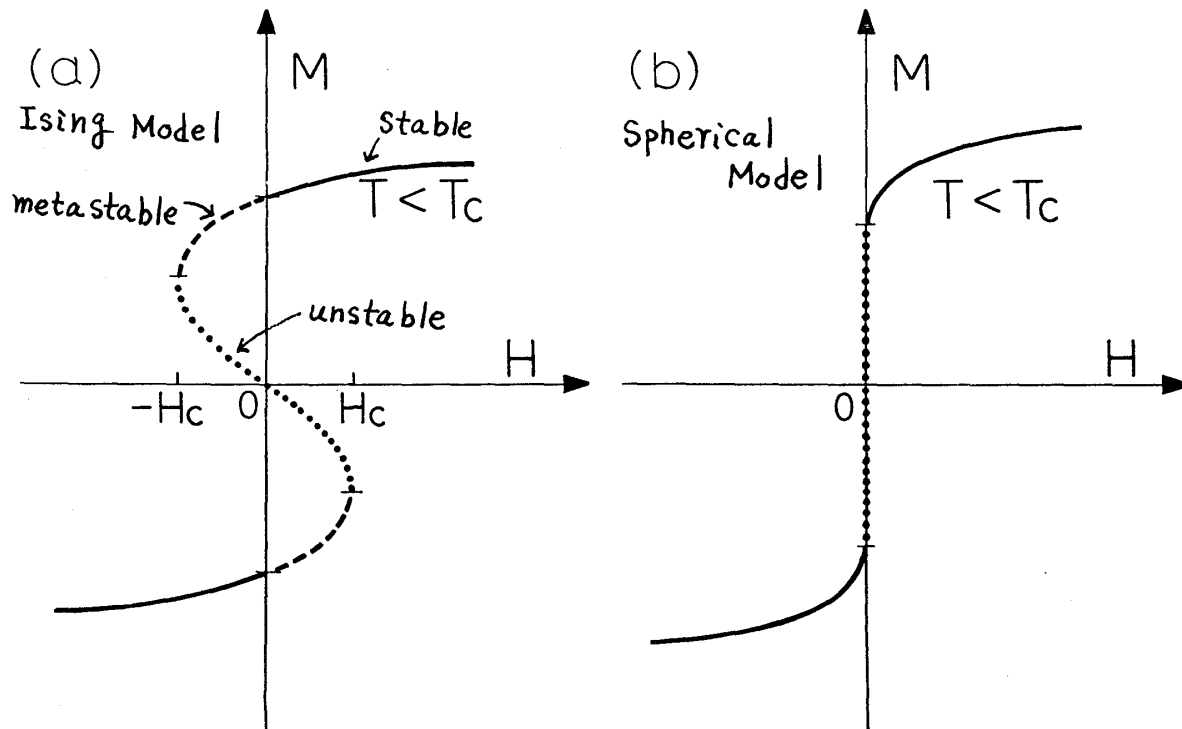


図 8

最後に, ここで導入された model が, 実はある条件のもとで TDGL 系の近似としての意味をもっていることを注意しておきたい。^{17), 22), 23)}

Appendix A.

mean-spherical model の平衡状態における諸量は, parameter $r(K, h)$ と

$$K_0(r) = \int \frac{1}{r + A(\mathbf{q})} d\mathbf{q}$$

を用いて次の様にあらわせる。

村上 力・富田博之

- 1) Magnetization $M = h/Kr$
- 2) Fluctuation spectrum $\chi(q) = 1/K(r + A(q))$
- 3) Critical point $K_c = K_0(0), h = 0$
- 4) Spontaneous magnetization $M_s = \pm \sqrt{1 - K_c/K} \quad (K \geq K_c)$

又 parameter $r(K, h)$ は sum rule

$$(h/Kr)^2 + K_0(r)/K = 1$$

から, $h = 0$ のときは

$$K_0(r) = K \quad (K < K_c)$$

から決まる。又,

$$r(K, 0) = 0 \quad (K \geq K_c)$$

である。

Appendix B.

$A(q) = q^2$ の場合, 複素数 z に対して

$$K_0(z) = \int_0^1 \frac{Dq^{D-1}}{q^2 + z} dq$$

と定義する。但し, 複素平面の負の実軸にそって cut を入れておく。このとき $|z| \ll 1$ に対し,

$$K_0(z) = K_c - AZ^a + \dots$$

但し

$$K_c = K_0(0) = \begin{cases} \infty & (D \leq 2) \\ D/(D-2) & (D > 2) \end{cases}$$

$$A = \begin{cases} D\pi/2 \sin[(D-2)\pi/2] & (2 < D < 4) \\ D/(D-4) & (D > 4) \end{cases}$$

$$a = \begin{cases} (D-2)/2 & (2 < D < 4) \\ 1 & (D > 4) \end{cases}$$

特に $D = 4$ では

$$K_0(z) = K_c - 2z \ln\left(\frac{1+z}{z}\right) \cong K_c + 2z \ln z + \dots$$

$D=3$ では

$$K_0(z) = 3 \left[1 - z^{1/2} \arctan \left(z^{-\frac{1}{2}} \right) \right] \simeq 3 - \frac{3\pi}{2} z^{1/2} + \dots$$

となる。

References

- 1) K. Kawasaki, Prog. Theor. Phys. **57** (1977), 410; **58** (1977), 175.
- 2) M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **56** (1976), 77 and 777; **57** (1977), 380.
J. Stat. Phys. **16** (1977), 11 and 477.
- 3) Y. Saito, J. Phys. Soc. Japan, **41** (1976), 388.
- 4) H. Tomita, A. Itô and H. Kidachi, Prog. Theor. Phys. **56** (1976), 786.
- 5) T. Shimizu, preprint (to be published in Physica A).
- 6) Y. Aizawa, preprint (to be published in Prog. Theor. Phys.).
- 7) Several review articles are in 'Fluctuations, Instabilities and Phase Transitions', ed. T. Riste, (Plenum Press, 1975). See also 'Critical Phenomena in Alloys, Magnets, and Superconductors', ed. R. E. Milles et al. (McGraw-Hill, 1970).
- 8) J. S. Langer and L. A. Turski, Phys. Rev. **A8** (1973), 3230.
The early works on nucleation theory are there-in.
- 9) K. Binder, Phys. Rev. **B8** (1973), 3423.
- 10) K. Kawasaki, M. C. Yalabik and J. D. Gunton, preprint (to be published in Phys. Rev.)
- 11) E. Stoll and T. Schneider, Phys. Rev. **A6** (1972), 429.
T. Schneider and E. Stoll, 'Anharmonic Lattices, Structural Transitions and Melting', ed. T. Riste, (Nordhoff, Leiden, 1974).
- 12) K. Binder and H. Müller-Krumbhaar, Phys. Rev. **B9** (1974), 2328.
K. Binder and D. Stauffer, Adv. in Physics, **25** (1976), 343.
- 13) C. Kawabata and K. Kawasaki, Phys. Letters, **65A** (1978), 137.
C. Kawabata, private communication.
- 14) A detailed review on kinetic Ising model is given by K. Kawasaki, 'Phase Transition and Critical Phenomena', ed. C. Domb and M. S. Green, (Academic Press, 1972), vol. 2.

- 15) T. H. Berlin and M. Kac, Phys. Rev. **86** (1952), 821.
- 16) See for example, G. S. Joyce, in the same textbook 14).
- 17) H. Tomita, Prog. Theor. Phys. **59** (1978), 1116.
A brief report of the present work is in the same issue.
- 18) M. Suzuki, Phys. Letters, **43A** (1973), 245.
- 19) Z. Rácz and T. Tél, Phys. Letters, **60A** (1977), 3.
- 20) T. Hashimoto and K. Nishimura, private communication.
- 21) H. Furukawa, preprint.
- 22) J. S. Langer, M. Bar-on and H. D. Miller, Phys. Rev. **A11** (1975), 1417.
- 23) C. Murakami and H. Tomita (submitted to Prog. Theor. Phys.)